CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT
D'INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

E.N.S.I.E.T.A. ——— 1978

M A T H E M A T I Q U E S II

Durée : 4 heures

1ère épreuve

Dans tout le problème, les réels a, b vérifient l'inégalité :

$$(1) \quad a^2 - 4b < 0$$

On considère l'équation différentielle du second ordre :

$$(2) \quad y'' + a y' + b y = 0$$

1ère partie

1. Trouver la solution φ de (2) qui satisfait aux conditions :

$$\varphi(0) = 0 \qquad \varphi'(0) = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2} = \omega$$

2. On suppose $a < 0$; m est un réel positif inférieur au maximum de φ pour $x \in \left[0 \quad \frac{2\pi}{\omega}\right]$.

On désigne par $\{x_0 , x_1 , x_2 , \cdots x_{2n} , x_{2\,n+1} \cdots\}$ les racines positives, rangées par ordre croissant, de l'équation :

$$(3) \quad \varphi(x) = m$$

a) Etudier les limites quand n tend vers l'infini des différences

$$\Delta_{2n} = x_{2n} - \frac{2n\pi}{\omega} \qquad \Delta_{2n+1} = \frac{(2n+1).\pi}{\omega} - x_{2n+1}$$

et du rapport $\dfrac{\Delta_{2n+1}}{\Delta_{2n}}$

.../...

b) Quelle est la nature de la série de terme général

$x_{2n} - x_{2n+1} + \frac{\pi}{\omega}$?

3. Calculer une valeur approchée de x_0 avec les données suivantes $a = -2$ $b = 5$ $m = \frac{1}{2}$

2ème partie

On désigne par E l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle (2)

1. Montrer que toute fonction $f \in E$ est indéfiniment dérivable et que ses dérivées f' f'' .... $f^{(n)}$ .... appartiennent à E.

2. Montrer que $f \neq 0$ et f' sont linéairement indépendantes. Etablir l'existence d'un couple unique de réels λ_n μ_n indépendants de x, tels que :

$$f^{(n)} = \lambda_n f + \mu_n f'$$

3. Calculer λ_n et μ_n en fonction de a, b et n

4. Etablir l'existence d'une série entière, de terme général $u_n x^n$,convergente pour tout x, dont la somme est égale à $f(x)$ $f \in E$

Exprimer u_n en fonction de a, b, n , $f(0)$ et $f'(0)$

5. On donne la relation de récurrence :

$(n+2)(n+1) V_{n+2} + a(n+1) V_{n+1} + b V_n = 0$ $n \in \mathbb{N}$ $a^2 - 4b < 0$

Calculer V_n en fonction de a, b, n V_0 et V_1

3ème partie

1. On considére l'intégrale : $F_1(x, u) = \int_u^x f(t)\,dt$ avec $f \in E$

Montrer que F_1 appartient à E si et seulement si u est racine de l'équation.

(4) $f'(X) + a f(X) = 0$

u_1 et u_2 étant deux racines de (4), que peut-on dire de

$$\int_{u_1}^{u_2} f(t)\,dt \ ?$$

.../...

On désigne par $f^{(-1)}$ celle des primitives de f qui est solution de (2)

En réitérant le processus, on construit une famille de fonctions f , $f^{(-1)}$, $f^{(-2)}$ ... $f^{(-n)}$ ....

chacune étant celle des primitives de la fonction précédente qui appartient à E

Il résulte de 2.2 qu'on peut écrire :

$$f^{(-n)} = \lambda_{-n} f + \mu_{-n} f'$$

λ_{-n} et μ_{-n} étant des réels indépendants de x

Calculer λ_{-n} et μ_{-n} en fonction de a, b et n

2. Soit g une fonction continue; on pose : $G_1(x,u) = \int_u^x g(t)dt$

et pour $n \geqslant 2$

$$G_n(x,u) = \frac{1}{(n-1)!} \int_u^x (x-t)^{n-1} \, g(t)dt$$

En considérant $\int_u^x G_{n-1}(y, u)\, dy$ comme une intégrale double associée à un domaine qu'on précisera, montrer que :

$$\int_u^x G_{n-1}(y, u)\, dy = G_n(x, u)$$

Quelles sont les dérivées successives de la fonction G_n par rapport à x ?

3. On se propose de calculer l'intégrale F_1 et les intégrales F_n

$$F_n(x, u) = \frac{1}{(n-1)!} \int_u^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt \qquad f \in E \quad n \geqslant 2$$

Comparer les dérivées d'ordre n de F_n et de $\lambda_{-n} f + \mu_{-n} f'$

Montrer que

$$F_n(x, u) = \lambda_{-n} f + \mu_{-n} f' + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (x-u)^k$$

Calculer les coefficients α_k en fonction de

λ_{-k} μ_{-k} , $f(u)$ et $f'(u)$

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail